سید محمد غلامزاده محمودی
دانشگاه صنعتی شریف

اشتباهات، مغالطه‌ها و سفسطه‌های ریاضی

مدرسان ریاضی، اغلب با اشتباهات ریاضی شاگردان[1] هنگام تدریس یا هنگام امتحان مواجه می‌شوند. اشتباهات ریاضی درجاتی دارند. بعضی از آن‌ها می‌توانند اشتباهات سهوی باشند، از قبیل یک اشتباه محاسباتی، کم دقتی یا سهل‌انگاری در اثبات، خلط کردن دو مبحث، استفاده از یک فرمول نادرست، اشتباه در به‌کار بردن جمع و ضرب، اشـــتباه در نسبت و تناســـب، بد گذاشتن جای پرانتزها در محاســـبات جبری، ساده‌سازی اشتباه در محاسبات با کسرها، اشتباه بین یک مثبت و منفی در یک محاسبه یا بسیاری موارد دیگر که طبقه‌بندی مفصل آن‌ها، از حوصلهٔ این متن خارج اســـت. موقعیت‌هایی هم وجود دارند که خطا و اشـــتباه از علم و دانشِ دانش‌آموز نشأت می‌گیرد، یعنی اگر دانش‌آموز مطلبی را نمی‌دانست، شاید مرتکب یک اشتباه به‌خصوص نمی‌شد.

اشـــتباهات دیگـــری هســـتند کـــه یک شـــهود نادرســـت، مســـبب آن‌هاســـت، از قبیل قاعدهٔ اشـــتباه مشـــتق‌گیری ماننـــد $(fg)'=f'g'$، $(a+b)^2=a^2+b^2$، $\log(x+y)=\log x+\log y$، $2^{x+y}=2^x+2^y$ و نظایـــر این‌هـــا یا حالا اشـــتباه دیگری که در آن ممکن اســـت دانش‌آمـــوز $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}=1$، در نظر بگیریـــد. در واقع این اشتباه، شاید از شـــهودی می‌آید که در آن، $\frac{\infty}{\infty}=1$ که البته در مواردی هم درست است یا اشتباهات دیگری که دانش‌آموز از قاعده‌هایی استفاده می‌کند که در حالت‌هایی درست هســـتند، اما در حالت به‌کار گرفته شده درست نیســـتند، مثل دانش‌آموزی که می‌پندارد ضرب دو عدد مثبت صرف‌نظر از اینکه صحیح یا کسری باشند، همواره از خود آن دو عدد بزرگ‌تر یا مســـاوی اســـت. نگارنده به یاد می‌آورد ســـر یک کلاس وقتی نشـــان داده شـــد که اعـــداد گنگ در تناظر یک‌به‌یک با اعداد گویا نیســـتند، دانش‌آموزی اعتراض کرد که مگر اعداد گویا و گنگ یک در میان نیســـتند؟! شاید برای این دانش‌آموز، این شهودِ اشتباه، استنتاجی از این احکام باشد که بین هر دو عدد گویای متمایز یک عدد گنگ وجود دارد و بین هر دو عدد گنگِ متمایز یک عدد گویا وجود دارد.

بعضـــی اوقات، حتـــی نام‌گذاری مفاهیم و اشـــیای ریاضی، می‌تواند دانش‌آموزان را به اشـــتباه بیندازد. مثلاً گاهی دانش‌آموزان اصطلاح «بســـته» را که مفهومی در آنالیز و توپولوژی اســـت، با مفهوم «کرانداری» اشـــتباه می‌گیرند. شـــاید یک علت چنین اشتباهی این باشد که از نظر زبانی، «بسته» به‌طور ناخودآگاه محصور بودن در یک مرز محدود را در ذهن القاء کند. حتی ممکن اســـت دانش‌آموز، «بسته» و «باز» را به‌خاطر معنی لغوی آن‌ها نقیض همدیگر بگیرد.

اشتباهات دیگری هم هستند که جنبهٔ منطقی دارند. یک نمونهٔ بارز در این زمینه موقعی اســـت که از شاگرد خواسته می‌شود نشان دهد حکم خاصی با حذف یکی از مفروضاتش برقرار نیست. بسیاری از اوقات مشاهده شده است که شاگرد به جای ارائه مثال نقض، بیان می‌کند که چون استدلال حکم، بدون فرضِ حذف شده کار نمی‌کند، پس این شرط حذف شده لازم است.

همچنین در بعضـــی مواقع، شـــاگردان از یک راه نادرســـت به یک پاسخ درست می‌رســـند، که البته در چنین شـــرایطی متقاعد کردن آن‌ها همیشـــه کار زیاد ساده‌ای نیست!

نوع دیگری از اشـــتباهات آن‌هایی هستند که بسیار غیربدیهی‌ترند و گاهی ممکن است یک فرد باتجربه را هم

به اشتباه بیندازند که این اشتباهات را می‌توان به‌عنوان سفسطهٔ ریاضی تلقی کرد.

سفسطه یا پارادوکس

بین سفسطه و پارادوکس تفاوت است، زیرا پارادوکس ریاضی تناقضی است که معمولاً با یک استدلال موجه حاصل می‌شود. پارادوکس موجب ایرادهایی جدی به اصول، تعریف‌ها یا مفروضات شده و گاهی مجبور می‌شویم در آن‌ها تجدید نظر کنیم، یا آن‌ها را به‌طور دقیق‌تری بیان کنیم. از این منظر، پارادوکس‌ها باعث می‌شوند نسبت به استوار کردن شالوده‌های ریاضیات، اهتمام بورزیم. اما سفسطه تناقضی است که از یک استدلال با ظاهر صحیح، اما در باطن تقلبی، به دست آمده است. البته سنخ سفسطه در ریاضیات با گونه‌های نظیر آن در فلسفه یا علوم دیگر، متفاوت است. قبحی که گاهی برای سفسطه و سوفسطائیان در بعضی از علوم وجود دارد، شاید در ریاضیات چندان وجود نداشته باشد. یک دلیل این است که در ریاضیات، تشخیص درستیِ برهان، کمتر محل مناقشه است و سفسطه و سوفسطائیان خطری جدی در این علم تلقی نمی‌شوند. در لغت‌نامهٔ انگلیسی آکسفورد، سوفسطائی[۲] را این طور توصیف کرده است:

فردی که یک استدلال هوشمندانه اما مغالطه‌آمیز به‌کار می‌بندد.

سفسطه‌های ریاضی اشتباه‌هایی هستند که فریبنده‌تر و چیره‌دستانه‌تر هستند و وجه نهفتهٔ حقیقت در آن‌ها، نسبتاً قابل توجه است. این خطاها و اشتباهات می‌توانند از منظر ریاضی، گاهی بسیار جالب و آموزنده باشند. معلمان باتجربه واقفند که تا چه حد توضیح یک اشتباه غیربدیهی برای کلاس، می‌تواند از نظر آموزشی ارزشمند باشد. حتی این موضوع در زندگی هم پیش می‌آید که بشر از اشتباهات و شکست‌هایش، بیشترین درس را می‌آموزد. اشتباهات جالب، معمولاً از علم و دانش نشأت می‌گیرند و حتی بعضی از آن‌ها در حالت‌هایی، می‌توانند نشانهٔ نبوغ تلقی شوند. بدین سبب در بعضی مواقع، اشتباهات در ریاضیات به خاطر بُعد آموزشی آن‌ها، تا حدودی تحسین شده‌اند. لمب[۳] استاد دانشگاه یوتا در «وبلاگی دربارهٔ وبلاگ‌های ریاضی[۴]» روی سایت انجمن ریاضی آمریکا، هم قافیه با نقل قول مشهوری از تولستوی می‌نویسد «راه‌حل‌های درست همه شبیه هستند، اما راه‌حل‌های نادرست هر کدام به شیوه خود نادرست هستند.»

در بخش بعد، چند نمونه از این سفسطه‌ها یا مغالطه‌ها که بیشتر ماهیت هندسی دارند، بیان می‌شوند. همهٔ مواردی که می‌آیند، سفسطه‌های شناخته شده و قدیمی‌اند، اما به قولی «روح نو بین در تنِ حرف کهن».

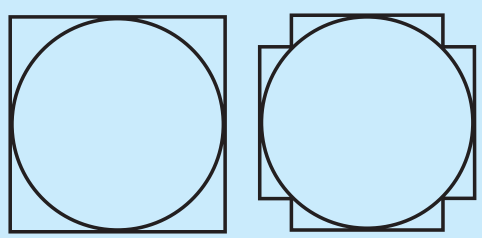
برای برانگیختن بیشتر حس کنجکاوی، از بیان جایی که اثباتش سفسطه‌آمیز است، اجتناب کرده‌ایم.

مغالطهٔ $\pi=4$

یک دایره به قطر ۱ در نظر بگیرید. محیط این دایره برابر با π است.

این دایره را در یک مربع به ضلع ۱ محاط می‌کنیم. محیط این مربع برابر با ۴ است. حال به صورت زیگزاگی، گوشه‌های این مربع را ببرید و آن را به دو گوشهٔ کوچک‌تر تقسیم کنید.

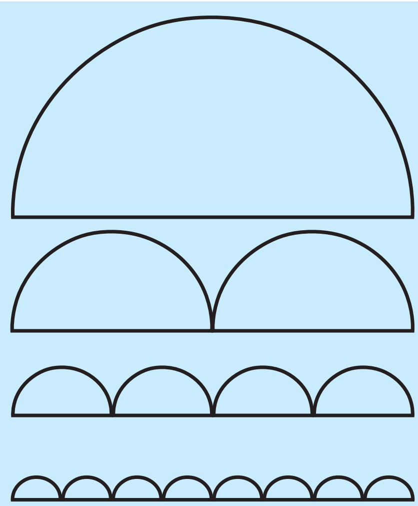
محیط شکل ۸ گوشِ حاصل، تغییری نمی‌کند و برابر با ۴ است. این فرایند را ادامه دهید، یک شکل ۱۶ گوش به دست می‌آید. با ادامهٔ این فرایند در هر مرحله، چندضلعی‌ای حاصل می‌شود که محیط آن همچنان ۴ است و به دایره میل می‌کند. پس $\pi=4$!



مغالطهٔ $\pi=2$

یک پاره‌خط به طول ۱ در نظر می‌گیریم و روی آن، n نیم‌دایره هر کدام به قطر $\frac{1}{n}$ رسم می‌کنیم.

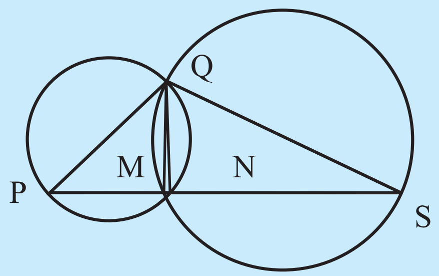
محیط هر کدام از این نیم دایره‌ها برابر با $\frac{\pi}{2n}$ است. بنابراین مجموع محیط شکل حاصل، برابر با $n\times\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}$ می‌شود. وقتی n زیاد می‌شود، این نیم‌دایره‌ها به پاره‌خط نزدیک می‌شوند و طول آن‌ها به طول پاره‌خط نزدیک می‌شود، پس $\frac{\pi}{2}=1$!



معلمان باتجربه واقفند که تا چه حد توضیح یک اشتباه غیربدیهی برای کلاس، می‌تواند از نظر آموزشی ارزشمند باشد. حتی این موضوع در زندگی هم پیش می‌آید که بشر از اشتباهات و شکست‌هایش، بیشترین درس را می‌آموزد

مغالطهٔ رسم دو عمود از یک نقطه بر یک خط

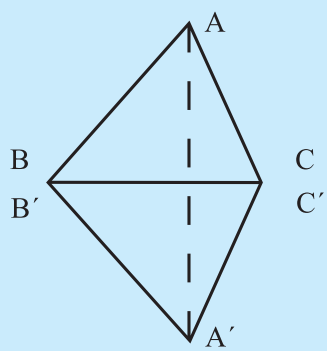
یک نقطهٔ Q خارج از یک پاره‌خط PS در نظر می‌گیریم. دایره‌هایی به قطر QP و QS رسم می‌کنیم. پاره‌خط PS، این دو دایره را در نقاط M و N قطع می‌کند. زاویهٔ QMS با توجه به اینکه روبه‌روی قطر QS است، قائمه است. به همین ترتیب زاویهٔ QNP با توجه به اینکه روبه‌روی قطر PQ است قائمه است. پس QM و QN دو عمود از Q بر خط واصل بین P و S هستند!



مغالطهٔ هم‌نهشتی دو مثلث به حالت ض‌ض‌ز

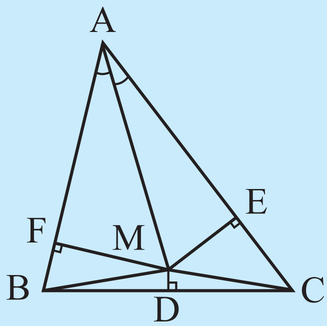
فرض کنید برای دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داشته باشیم، $AB=A'B'$ و $BC=B'C'$ و $\angle BAC = \angle B'A'C' = \alpha$، یعنی به حالت ض‌ض‌ز هم‌نهشت هستند.

اضلاع BC و $B'C'$ را مطابق شکل، روی هم قرار می‌دهیم. نقطهٔ A را به A' وصل می‌کنیم. با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث ABA'، دو زاویهٔ $\angle BAA'$ و $\angle B'A'A$ با هم برابرند. با توجه به اینکه دو زاویهٔ $\angle BAC$ و $\angle B'A'C'$ با هم برابرند، نتیجه می‌شود دو زاویهٔ $\angle A'AC$ و $\angle AA'C'$ نیز با هم برابرند. پس مثلث $AA'C$ متساوی‌الساقین است، یعنی $AC=A'C'$، در نتیجه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت ض‌ض‌ض با هم، هم‌نهشت هستند!



مغالطهٔ متساوی‌الساقین بودن هر مثلث

مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید. فرض کنید D نقطهٔ وسط BC باشد. محل تقاطع نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC را M می‌نامیم. فرض کنید F پای عمود فرود آمده از M بر ضلع AB و E پای عمود فرود آمده از M بر ضلع AC باشد. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMF و AME به حالت وتر و یک زاویه با هم هم‌نهشت هستند. پس خواهیم داشت.



$AF=AE$ (۱)

$MF=ME$ (۲)

از سوی دیگر، چون MD عمود منصف ضلع BC است، پس $MB=MC$. از تساوی اخیر و رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MFB و MEC به حالت وتر و یک ضلع، با هم هم‌نهشت هستند. در نتیجه خواهیم داشت.

$FB=EC$ (۳)

از دو رابطهٔ (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $AB=AC$، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است!

مغالطهٔ برابر بودن محیط هر دو دایره

دو دایرهٔ هم‌مرکز را در نظر می‌گیریم. تصور کنید که این دو دایره به صورت یک چرخ درآمده باشند. این چرخ را روی یک خط مستقیم آن قدر می‌غلطانیم تا نقطهٔ تماسِ اولیهٔ A با خط، دوباره روی همان خط قرار گیرد، نقطهٔ جدید A را A' می‌نامیم. در این فرایند، A به اندازهٔ محیط دایرهٔ بزرگ‌تر را طی می‌کند تا به A' برسد. پس طول AA' برابر با محیط دایره بزرگ‌تر است. با همین استدلال، طول BB' برابر با محیط دایره کوچک‌تر است. چون AA' و BB' با هم برابرند، نتیجه می‌شود محیط دو دایره با هم برابرند!

مغالطه در اثبات محاسبهٔ مجموع زوایای داخلی یک مثلث

فرض کنید مجموع زوایـــای داخلی مثلث برابر با α باشد. پس در مثلث ABD داریم

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\alpha$$

به‌طور مشابه در مثلث ADC به دست می‌آوریم.

$$\angle 4+\angle 5+\angle 6=\alpha$$

با جمع کردن دو رابطهٔ اخیر به‌دست می‌آید

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=2\alpha$$

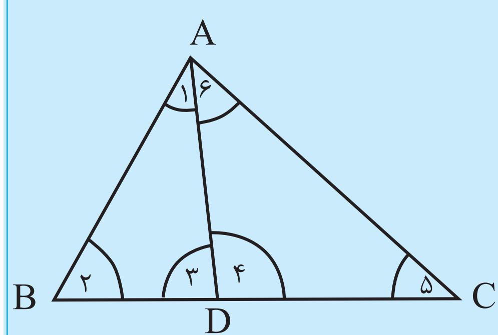
اما چون دو زاویهٔ $\angle 3$ و $\angle 4$ مکمل هستند پس

$$\angle 3+\angle 4=180^\circ$$

بنابراین به‌دست می‌آید

$$\angle 1+\angle 2+180^\circ+\angle 5+\angle 6=2\alpha$$

اما $\angle 6+\angle 5+\angle 2+\angle 1$ مجموع زوایای داخلی مثلث ABC اســت که برابر با α اســت. پس به دست می‌آید $\alpha+180^\circ=2\alpha$، پس $\alpha=180^\circ$.



منابعی برای مطالعهٔ بیشتر

کتاب‌هـــای زیادی دربـــارهٔ اشـــتباه‌ها، مغالطه‌ها، پارادوکس‌ها و سفســـطه‌های ریاضی نوشته‌اند. یکی از این کتاب‌ها، منبع [۳] نوشـــتهٔ نورتروپ اســـت که در سال ۱۳۵۰ تحت عنوان «معماهای ریاضی، حیله‌های جبری و هندســـی، مغالطات و تناقضات» توسط محمد رکنی قاجار (از زبان فرانسوی) ترجمه شده و به وسیلهٔ انتشـــارات یکان چاپ شـــده که ظاهراً در حال حاضر، این کتاب خارج از چاپ اســـت. یک کتاب دیگر در این زمینهٔ منبع [۲] نوشـــتهٔ ماکسول است که تحت عنوان «مغالطه‌های ریاضی» توسط غلامرضا یاسی‌پور ترجمه شـــده و انتشـــارات محراب قلم در ســـال ۱۳۸۰ آن را چاپ کرده اســـت. یک کتاب قدیمی‌تر و منبع [۱] هم توســـط لیتســـمان و تریر با عنوان «اشتباه کجاست؟» نوشته شده اســـت (چاپ اول، سال ۱۹۱۳) که یکی از سرچشـــمه‌های اصلی کتاب‌های معرفی شده محسوب می‌شود. در این منبع، بســـیاری از اشتباه‌های ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در شماره‌های پیشین مجلهٔ رشـــد آموزش ریاضی، مقاله‌های متعددی به بررســـی اشـــتباه‌های ریاضی پرداخته‌اند که از جمله، می‌توان به مقاله با عنوان «منشـــأ خطاهای دانش‌آموزان» نوشتهٔ بن‌زیو اشـــاره کرد که خلاصه‌ای از این منبع، توســـط سپیده چمن‌آرا در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی (دورهٔ ۲۹، شمارهٔ ۲، زمســـتان ۱۳۹۰) ترجمه و چاپ شده است و در آن، نویســـنده به بررسی خطاهای معقول ریاضی پرداخته است. در مقالهٔ «پارادوکس‌های هندسی» نیز (مجلهٔ رشد برهان متوســـطهٔ ۲، دورهٔ ۲۱، شمارهٔ ۷۴، تابستان ۱۳۹۳) فرزاد حمزه‌پور به بررسی سه سفسطهٔ هندسی پرداخته است. یکی سفسطهٔ متساوی‌الساقین بودن هر مثلث و دیگری، رسم دو عمود از یک نقطه بر یک خط داده شده اســـت که در این مقاله هم بررسی شدند. همچنین یک سفسطهٔ دیگر نیز در مورد منفرجه بودن زاویهٔ قائمه در مقالهٔ «مغالطه‌های ریاضی» (مجلهٔ رشـــد برهان دورهٔ متوســـطهٔ ۲، دورهٔ ۲۵، شماره ۹۴، اردیبهشت ۱۳۹۵) توسط احســـان یارمحمدی نوشته شـــده اســـت که در آن، به دو مغالطهٔ هندســـی، یکی متساوی‌الســـاقین بودن هر مثلث (با روش مثلثاتی) و دیگری مغالطهٔ قرار داشـــتن هر نقطهٔ درون یک دایره روی محیط آن، بررسی شده است.

پی‌نوشت

۱. منظور از شاگرد، هم دانش‌آموز و هم دانشجوست و معادل student است.
2. Sophist
3. Evelyn Lamb
4. Blog on Math Blogs, (http://blogs.ams.org/blogonmathblogs/)

منابع

[1] Lietzmann, W. and Trier, O. (1913). “Wo steckt der Fehler? Trugschlüsse und Schülerfehler.” Leipzig: B. G. Teubner. IV+57 S. kl. 8° (Math. Bibl. X) (1913).
[2] Maxwell, E. A. (1959). Fallacies in mathematics Cambridge University Press, New York.
[3] Northrop, E. P. (1959). “Riddles in mathematics. A book of paradoxes.” London: The English Universities Press Ltd. X, 242 p. (1959).